

CONTRIBUCIONES A UN LABORATORIO DE CONTROL DE BAJO COSTO: EL PÉNDULO INVERTIDO ROTANTE

Virginia Mazzone * Sebastián Mallo * Roberto Saco *

* Ingeniería en Automatización y Control Industrial (IACI),
Universidad Nacional de Quilmes
Av. Calchaquí 5800, Flcio. Varela (1888), Bs As, Argentina.
Tel:(011)4275-7714 vmazzone@unq.edu.ar

Resumen: Este trabajo describe la realización y el control de un Péndulo Invertido Rotante para el laboratorio de control. Se construyó el sistema, se obtuvo el modelo matemático y se diseñaron diversos controladores: *control en cascada* y *control por realimentación de estados*. La implementación se realizó utilizando una PC en tiempo real.

:

Keywords: Péndulo invertido, Realimentación de Estados, Control en Cascada.

1. INTRODUCCIÓN

Muchas Universidades del mundo poseen un péndulo invertido para demostrar resultados de control. La razón por la cual este problema es interesante desde el punto de vista de control es porque ilustra muchas de las dificultades asociadas con problemas de control del mundo real. El péndulo invertido rotante, conocido también como *Péndulo de Furuta*, consiste en un brazo giratorio horizontal, el cual posee en su extremo una barra vertical la cual gira libremente alrededor de un eje paralelo al brazo, Fig. 1.



Figura 1. Foto del Péndulo Invertido Rotante

El principal objetivo fue diseñar a bajo costo un sistema que pueda ser utilizado para la enseñanza de control. El objetivo de control planteado es mantener el *péndulo* en forma vertical y controlar el brazo en una posición determinada. Dicho objetivo se logra implementando controladores lineales por medio de una PC.

2. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

El sistema cuenta con un motor de corriente continua como fuente de movimiento del brazo y dos sensores para medir el ángulo del péndulo y del brazo. En la Fig. 2 se muestra un diagrama de los componentes del sistema y del flujo de señales, que sintetiza el lazo de control implementado.

2.1 Controlador

La implementación del control en tiempo real se realizó a través de una PC con una placa adquisidora de datos. El conjunto de programas que se utilizó para el manejo de la placa adquisidora y para la simulación e implementación de los controladores en la PC son: Real Time Workshop, Real Time Windows Target (Mat, 1998), MATLAB y SIMULINK.

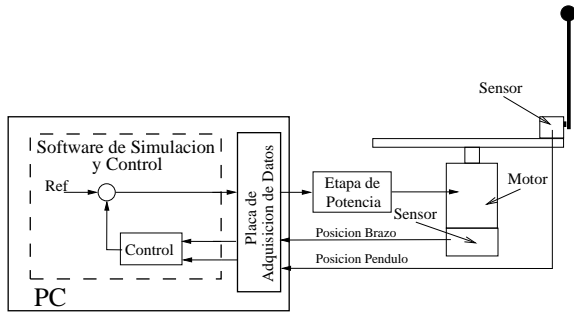


Figura 2. Diagrama del lazo de control

La placa adquisidora es una *Interfaz Múltiple para PC* de Electroquímica Delta S.R.L. para Slot ISA de PC. Si bien es una placa de bajo costo, cuenta con los requisitos que demanda el proyecto.

2.2 Actuador

Para el movimiento del brazo se utilizó un motor de corriente continua, sin escobillas, tensión nominal de alimentación de 24V, consumo de corriente de 2A y reducción a engranajes de 1:130.

2.3 Sensores

Las variables del sistema que se miden son el ángulo del brazo y el ángulo del péndulo. En cada uno de los casos se utilizó métodos de medición diferentes.

Medición del Ángulo del Brazo. El sensor que se utilizó es un encoder incremental, solidario al eje del motor y una precisión de $\frac{2\pi}{40 \cdot 130} = 0.0012 [rad/pulso]$. La lógica para contar los pulsos fue realizada en SIMULINK.

Medición del Ángulo del Péndulo. El sensor que se utilizó es un sensor magnético, estos sensores usan la propiedad por la cual un material magnético cambia su resistencia en presencia de un campo magnético. Este sensor entrega una tensión de 0-5V correspondiente a una variación de ángulo de $\pm 18^\circ$, por lo que la mínima variación de ángulo que sensa es $0.0024 [rad]$.

3. MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DEL SISTEMA

La modelización es el primer paso en el diseño de un lazo de control ya que el diseño que se utilizó está basado en el modelo. En esta sección se muestra el modelo matemático del péndulo invertido rotatorio, (Furuta *et al.*, 1991). Para obtener el modelo matemático se utilizaron las ecuaciones de Euler-Lagrange, que proporcionan dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden no lineales, las que se escribieron en ecuaciones de estados. Dado que el modelo obtenido es no lineal, se linealizó el sistema alrededor del punto de operación (equilibrio inestable del sistema).

3.1 Ecuaciones de movimiento del péndulo invertido

Una de las formas más eficientes de encontrar las ecuaciones de movimiento de un sistema robótico es aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange. En primer lugar se calculó el *Lagrangiano*, que es la energía cinética menos la energía potencial del sistema. Para ello se utilizó el diagrama simplificado de la Fig. 3. Las ecuaciones que describen el movimiento se encuentran calculando algunas derivadas del Lagrangiano e igualándolas a la fuerza aplicada (fricción y torque del motor).

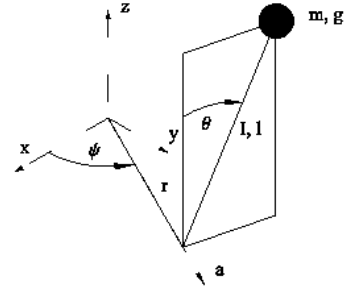


Figura 3. Diagrama simplificado del péndulo

Las ecuaciones de Euler-Lagrange en notación vectorial están definidas por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = f, \quad (1)$$

donde $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) = E_{cin} - E_{pot}$.

Calculando la energía cinética y potencial, tomando

$$q(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \psi(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{q}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

y f el momento aplicado al sistema, el torque del motor y la fricción, podemos escribir el Lagrangiano en forma matricial como

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \underbrace{\begin{bmatrix} ml^2 & mrl \cos \theta \\ mrl \cos \theta & I + mr^2 \end{bmatrix}}_{M(q)} \dot{q} - \underbrace{mgl \cos \theta}_{E_{pot}}, \quad (3)$$

donde la matriz $M(q)$ se llama *matriz de masa generalizada*.

El modelo no lineal que resulta es

$$\ddot{q} = M^{-1}(q) \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} M(q) \right) \dot{q} - \frac{\partial E_{pot}}{\partial q} + f \right]. \quad (4)$$

La fuerza aplicada es el torque que aporta el motor, en dirección ψ y la fuerza de rozamiento en θ , que se aproxima como

$$f = \begin{bmatrix} f_\psi \\ f_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K}{R} v(t) - \frac{K^2}{R} \dot{\psi}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

modelo de un motor de Corriente Continua (Khalil, 1996) donde se desprecia la fuerza de roce y $K = K_\tau = K_e$.

3.2 Sistema linealizado

El modelo que se obtuvo, Ec. 4, se puede expresar en variable de estados ($\dot{x} = f(x, u)$) tomando $x_1 = \theta$, $x_2 = \psi$, $x_3 = \dot{\theta}$ y $x_4 = \dot{\psi}$, es *no lineal*. Bajo ciertas condiciones se puede aproximar dicho modelo con un modelo de estado lineal incremental, $\dot{x}_\delta(t) = A(t)x_\delta(t) + B(t)u_\delta(t)$, $x_\delta(t_0) = x_{\delta 0}$ (Chen, 1999). La idea de utilizar un modelo lineal es que más simple tanto el análisis del sistema como el diseño de controladores.

Nos interesa el comportamiento del sistema alrededor del punto de equilibrio, $x_{eq} = [0 \ x_2 \ 0 \ 0]$, $\forall x_2$,

El sistema incremental linealizado, despreciando la inercia del péndulo frente a la inercia del brazo, es

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 & 0 & \frac{r\alpha}{l} \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{r\beta}{l} \\ \beta \end{bmatrix} u \quad (6)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \psi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix},$$

con $\alpha = \frac{K^2}{IR}$ y $\beta = \frac{K}{IR}$. La matriz transferencia resulta

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \Theta(s) \\ \Psi(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-s r \beta / l}{(s + \alpha)(s^2 - g/l)} \\ \frac{\beta}{s(s + \alpha)} \end{bmatrix} U(s) \quad (7)$$

4. DISEÑO DE CONTROLADORES

En esta sección se desarrollan dos técnicas de diseño basadas en el modelo matemático del sistema. Primero se utilizó una técnica de control simple, tomando al sistema como dos sistemas de una entrada y una salida, *control en cascada* (Goodwin *et al.*, 2001). Luego una técnica más compleja utilizando las ecuaciones en espacio de estado, *realimentación de estados* (Bay, 1999).

Para poder utilizar las distintas técnicas de diseño, como para realizar las simulaciones y la implementación del control, necesitamos conocer los valores numéricos de los parámetros. Mucho de ellos son variables que podemos medir o que conocemos, como

- $l = 0.3$ [m]
- $r = 0.27$ [m]
- $M = 0.5$ [kg]
- $m = 0.05$ [kg]
- $g = 9.8$ [m/seg²]

pero no es así con las constantes del motor: R y K que se estimaron utilizando un método iterativo. Para validar dichas constantes se contrastó los resultados obtenidos del sistema real con los de simulación. Obteniendo

$$\alpha = 11.8$$

$$\beta = 9.8$$

4.1 Control en Cascada

El control en cascada es una estructura alternativa de control, cuya idea básica es *realimentar variables intermedias* en un sistema de una entrada y una salida. Esta estructura, representada en la Fig. 4, tiene dos lazos:

- un lazo primario con un controlador primario $K_1(s)$, y
- un lazo secundario con un controlador secundario $K_2(s)$.

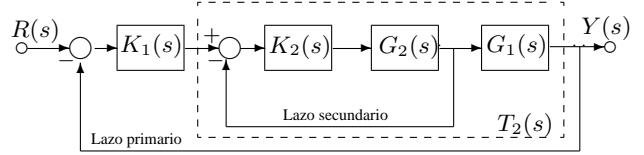


Figura 4. Estructura de control en cascada

Si se pensara el problema como si fuera SISO, tomando como entrada $U(s)$ y salida $\Psi(s)$, donde además se mide el ángulo del péndulo $\Theta(s)$, se puede reescribir el sistema como muestra la Fig. 5, teniendo en cuenta la Ec. 7.

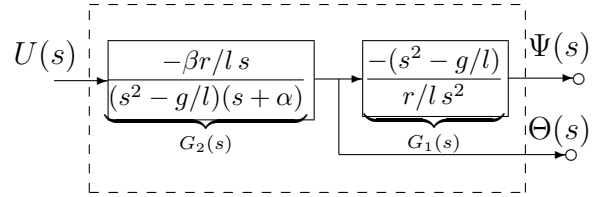


Figura 5. Diagrama de bloques del péndulo como si fuera un sistema SISO

El diseño de la Fig. 4, puede separarse en dos etapas:

Lazo secundario. Se diseña $K_2(s)$ para estabilizar el ángulo del péndulo $\Theta(s)$, así se obtiene la función de sensibilidad complementaria $T_2(s)$ para el lazo secundario.

Lazo primario. Una vez diseñado $K_2(s)$ para estabilizar el ángulo del péndulo $\Theta(s)$, el controlador primario $K_1(s)$ puede diseñarse tomando como planta equivalente $T_2(s)G_1(s)$.

4.1.1. Diseño de $K_2(s)$ por Asignación de Polos El problema es diseñar $K_2(s) = \frac{P_2(s)}{L_2(s)}$ tal que el polinomio característico $A_{lc}(s) \triangleq A(s)L(s) + B(s)P(s)$ sea estable. Tomando

$$B(s) = -\beta r / l s \quad \text{y} \quad A(s) = (s^2 - g/l)(s + \alpha). \quad (8)$$

Para que existan polinomios $P_2(s)$ y $L_2(s)$ tales que el controlador $K_2(s)$ resulte estrictamente propio, alcanza con elegir el grado del polinomio característico, $A_{lc}(s)$, igual a 5 (Goodwin *et al.*, 2001). Para la elección de A_{lc} se recurrió a la cancelación estable de los factores de $A(s)$, es decir se eligió $A_{lc}(s) = (s + \sqrt{g/l})(s + \alpha)\bar{A}_{lc}(s)$, donde ahora $\bar{A}_{lc}(s)$ tiene orden 3. De esta forma el polinomio característico a lazo cerrado es

$$A_{lc}(s) = P_2(s) \underbrace{(-\beta r/l s)}_{B(s)} + L_2(s) \underbrace{(s^2 + g/l)(s + \alpha)}_{A(s)}, \quad (9)$$

que para poder realizar la cancelación estable, se debe asegurar que $P_2(s) = (s + \sqrt{g/l})(s + \alpha)\bar{P}_2(s)$. Así $\bar{P}_2(s) = p_0$, con $p_0 \in \mathbb{R}$, ya que $P_2(s)$ tiene grado 2. Quedando así la siguiente ecuación

$$\bar{A}_{lc}(s) = \underbrace{p_0}_{\bar{P}_2(s)} \underbrace{(-\beta r/l s)}_{L_2(s)} + \underbrace{(s^2 + l_1 s + l_0)}_{L_2(s)} (s - \sqrt{g/l}). \quad (10)$$

Si $\bar{A}_{lc}(s) = s^3 + c_2 s^2 + c_1 s + c_0$, lo único que queda es elegir los coeficientes de $\bar{A}_{lc}(s)$ tal que sea estable. La elección de este polinomio no es trivial ya que $G_2(s)$ es inestable, y existen *limitaciones de diseño* para la sensibilidad complementaria cuando existen polos inestables en el sistema (Seron *et al.*, 1997) Dado que $G_2(s)$ tiene un polo inestable en $\sqrt{g/l} = 5.7154$, se elige como frecuencia de corte del sistema a lazo cerrado algún valor mayor para hacer la acción de control rápida. Utilizando los parámetros dados,

$$G_2(s) = \frac{-8.82s}{(s + 11.8)(s^2 - 32.66)}. \quad (11)$$

Se propusieron tres polos rápidos para la elección del $\bar{A}_{lc}(s)$ tal que la frecuencia del lazo sea mayor que el polo inestable. Los polos propuestos son $p = [-14 \ -13 \ -12]$, es decir, $\bar{A}_{lc}(s) = s^3 + 39s^2 + 506s + 2184$, que resolviendo la Ec. (10) da como resultado el controlador

$$K_2(s) = \frac{-129.67(s + 11.8)(s + 5.715)}{(s + 52)(s - 7.341)}, \quad y$$

$$T_2(s) = \frac{1143.7s}{(s + 14)(s + 13)(s + 12)}.$$

4.1.2. *Diseño de $K_1(s)$* Una vez estabilizado el lazo secundario, se eligió $K_1(s)$ tal que estabilice el lazo de la Fig. 4. Para ello se tomó como sistema a lazo abierto a

$$T_2(s)G_1(s) = \frac{-p_0 \beta r/l s - (s^2 - g/l)}{\bar{A}_{lc}} \frac{r/l s^2}{r/l s \bar{A}_{lc}} = \frac{p_0 \beta r/l (s^2 - g/l)}{r/l s \bar{A}_{lc}}.$$

El sistema con los valores constantes,

$$G_1(s) = \frac{-(s^2 - 32.66)}{0.9s^2} \Rightarrow$$

$$G_1(s)T_2(s) = \frac{-1270.7(s^2 - 32.66)}{s(s + 14)(s + 13)(s + 12)},$$

que tiene un polo en el origen y un cero de fase no mínima que impondrán limitaciones en el diseño, (Seron *et al.*, 1997). En este caso se ajustó un controlador PI, de la familia PID, con transferencia

$$K_1(s) = \frac{0.02s + 0.002}{s}. \quad (12)$$

4.2 Control por Realimentación de Estado - LQR

En *realimentación de estado*, la señal de control se propone lineal al estado, $u(t) = r_{ef}(t) - Kx(t)$. Una forma

de calcular la ganancia de realimentación K es siguiendo el criterio de optimización, minimizando el funcional cuadrático (Bay, 1999),

$$J = \int_0^{t_\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt, \quad (13)$$

donde Q y R son matrices constantes que ponderan el estado y la actuación respectivamente. El funcional J puede interpretarse como el costo total de la transición de los estados de un punto a otro.

4.2.1. *Seguimiento Robusto: Acción Integral* Se introdujo un esquema de seguimiento de referencias constantes para cumplir con los objetivos de control establecidos. La idea se basa en *aumentar* la cantidad de variables de estado de la planta, agregando una nueva: x_a que integra el error, es decir $\dot{x}_a = r - y = r - Cx$, (Chen, 1999). Quedando así las ecuaciones de estado del sistema aumentado

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (14)$$

Si se considera la realimentación de estado

$$u = -\bar{K}x = -[K \ K_a] \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix}, \quad (15)$$

el sistema a lazo cerrado es

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -BK_a \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (16)$$

La idea ahora es diseñar $[K \ K_a]$ de forma tal que el sistema (16) sea asintóticamente estable. En particular, la estabilización de x_a , implica que se produzca el seguimiento deseado ya que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}_a = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = r. \quad (17)$$

Tomando

$$Q_a = \begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad R = 10. \quad (18)$$

se obtuvo

$$K = [-27 \ -1.06 \ -4.29 \ -2.85 \ 0.316]. \quad (19)$$

El control con realimentación de estados asume la disponibilidad de las variables de estado. Esto no es lo que pasa en la práctica, en particular el sistema no cuenta con sensores para medir las velocidades angulares (estados del sistema) por lo que se estimaron estas variables no medidas. A continuación describiremos dos ideas para estimar dichas variables de estado.

4.3 Estimadores de los Estados no Medidos

Esta primera idea es básica y se trata de aproximar la derivada de una variable en forma discreta. Es decir

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &\approx \frac{\theta(k+1) - \theta(k)}{T} \\ \dot{\psi} &\approx \frac{\psi(k+1) - \psi(k)}{T}\end{aligned}\quad (20)$$

donde T es el período con el cual la PC toma los datos y la diferencia corresponde a dos mediciones consecutivas. Esta forma de estimar los estados es muy sencilla de implementar en SIMULINK, pero para que esta estima sea buena, T tiene que tomar valores pequeños.

4.4 Observador de los Estados

En esta sección se introduce un dispositivo dinámico, llamado *observador*, cuya salida es una estima del vector de estados. En particular se detalla el observador de orden completo, ya que tiene el mismo orden que la planta, y de esta forma se estimó todo el vector de estados. Se representa con $\hat{x}(t)$ a la estima de $x(t)$ y se toma el sistema (21), donde A , B , y C son conocidas, y la entrada $u(t)$ y la salida $y(t)$ son medibles, aunque no el estado $x(t)$. El problema es estimar $x(t)$ a partir de esta información.

La idea es que dado que conocemos las matrices A , B y C , podemos duplicar el sistema,

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t),\end{aligned}\quad (21)$$

donde $\hat{y}(t)$ es la salida que se obtiene de los estados estimados. Si se inyecta al sistema (21) una señal de corrección $L(y(t) - C\hat{x}(t))$, donde L es una matriz de ganancia constante, de forma tal que si no hay error no hay corrección, pero si hay error, una elección apropiada de L puede hacer que el error de estimación tienda asintóticamente a cero. Las ecuaciones vienen dadas por

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ &= (A - LC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ly(t).\end{aligned}\quad (22)$$

Se define $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ como el error de estimación. Entonces $\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t)$, donde los autovalores de $(A - LC)$ son los que gobiernan la dinámica de $\tilde{x}(t)$. La elección correcta de L , tal que $(A - LC)$ tenga autovalores negativos, afirma que el error de estimación tiende asintóticamente a cero. La existencia de L depende de la observabilidad del sistema, que en este caso se trata de un sistema observable.

Para elegir dónde los autovalores de $A - LC$, se consideraron los autovalores que resultan del control LQR a lazo cerrado pero 1.5 veces más rápidos.

$$L = \begin{bmatrix} 0.5335 & 0.1312 \\ 0.0177 & 0.3533 \\ 7.6284 & 4.3791 \\ 0.2567 & 1.4825 \end{bmatrix}\quad (23)$$

5. ENSAYOS DE CONTROLADORES SOBRE EL SISTEMA

Una vez que en las simulaciones se obtuvieron controladores que proveen el desempeño deseado, se implementaron dichos controladores en el sistema real. Para ello fue necesaria la discretización de los controladores diseñados en la Sec. 4, considerando el período de muestreo $T = 0.01\text{seg}$. En esta sección se muestra la implementación de dichos controladores en SIMULINK y los resultados que se obtuvieron al realizar los mismos ensayos con el sistema real.

5.1 Implementación del Control en Cascada

En esta sección se muestran los resultados que se obtuvieron al implementar el lazo de control en cascada con los controles $K_1(s)$ y $K_2(s)$ calculados en la Sec. 4.1.

La Fig. 6 muestra los resultados obtenidos de la implementación. Para el ensayo se mantuvo el péndulo en posición vertical ya que este control no puede levantarlo desde su reposo ($\approx 0.2\text{rad}$) y tomamos referencia nula.

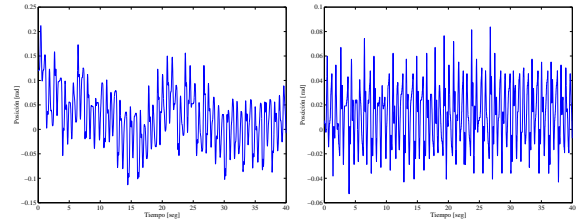


Figura 6. Resultados obtenidos de la implementación del control en cascada, a la izquierda $\psi(t)$ y a la derecha $\theta(t)$

En la Fig. 7 se muestran los resultados que se obtuvieron para $\psi(t)$, tomando como referencia la señal que se muestra en la Fig. 7.

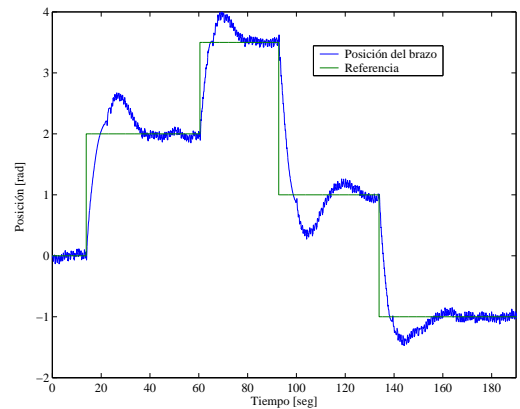


Figura 7. Seguimiento a referencia constante

5.2 Implementación del Control en Realimentación de Estados

La Fig. 8, muestra la comparación entre los resultados obtenidos de la implementación del estimador de las ve-

locidades angulares y el observador. El desempeño utilizando el observador resulta mejor que el del estimador de derivadas, debido a que el observador se comporta como un filtro de alta frecuencia del ruido.

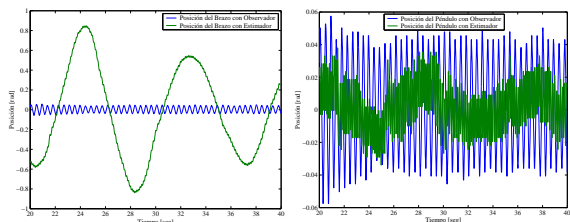


Figura 8. Ángulo medido en el sistema real, a la derecha θ y a la izquierda ψ

En la Fig. 9, se muestra la respuesta del sistema cuando la referencia es una onda cuadrada de amplitud $\pi/2 \text{ rad}$ y de frecuencia 60 seg . Los picos que realiza ψ en los primero 15 seg es debido a que el brazo tuvo que levantar el péndulo desde su reposo, 0.2 rad .

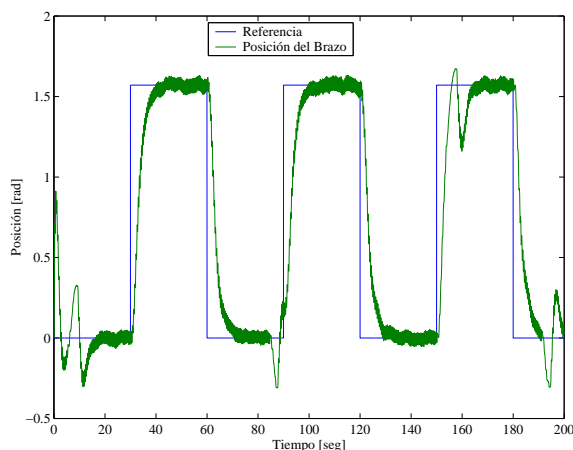


Figura 9. Seguimiento a una señal de referencia *onda cuadrada*

6. CONCLUSIONES

Este proyecto es una contribución al laboratorio de la carrera para que otros alumnos puedan seguir profundizando conocimientos de control y aplicarlos en un sistema real. Utilizar un software en tiempo real fue una gran ventaja, dado que se pueden desarrollar diversos controladores y se pueden almacenar datos con facilidad para análisis.

Aunque el sistema es complejo (no lineal y MIMO), fue posible desarrollar técnicas simples utilizadas en la industria, como el control en cascada. El diseño del control en cascada fue sencillo ya que supone que el sistema es de una entrada y una salida y de esta forma permite utilizar cualquier técnica de control que utilice la representación entrada salida. La implementación fue inmediata dado que solo se necesitó medir las variables estaban disponibles.

Para implementar el control por realimentación de estados fue necesario desarrollar técnicas que aproximen las

variables de estado que no estaban accesibles. Se propusieron dos: *estimador de derivadas* y *observador lineal de estado*. Si bien el primero es simple de implementar, el desempeño alcanzado por el segundo fue mejor, dado que la amplitud de las oscilaciones que produce es menor. Por último, al sistema con realimentación de estado, se le agregó acción integral para lograr seguimiento de referencias constantes. Con este esquema, no solo se logró que siga referencias constantes sino también se hizo más robusto el lazo cerrado del sistema.

Al finalizar los ensayos se planteó la posibilidad de mejorar los desempeños obtenidos con los controladores diseñados modificando los componentes físicos, sensores y actuador, que imponen limitaciones. La conclusión que se obtuvo por simulación es que para mejorar el desempeño, hay que centrarse en disminuir el roce estático y el juego en el eje del motor.

7. REFERENCES

- Bay, J. S. (1999). *Linear Space Systems*. McGraw-Hill.
- Chen, C-T (1999). *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press.
- Furuta, K., M. Yamakita and S. Kabayashi (1991). Swing-up control of inverted pendulum. *IEEE IECON'91*, pp. 2193.
- Goodwin, G. C., S. F. Graebe and M. E. Salgado (2001). *Control System Design*. Prentice Hall International.
- Khalil, H. (1996). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.
- Mat (1998). *Real Time Windows Target, User's Guide Version 1*.
- Seron, M. M., J. H. Braslavsky and G. C. Goodwin (1997). *Fundamental Limitations in Filtering and Control*. Springer.